

CAPITOLO 23

Nidi misti

Ricordiamo che

TEOREMA 23.1. (Johnson-Pomareda [96]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo che contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo G nel complemento di traslazione tale che G è il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologie di ordine $q + 1$ con assi affini, allora, si ha una delle seguenti situazioni:

- (1) π è un piano di André,
- (2) q è dispari e π è costruito a partire da un piano di Desargues Σ tramite sostituzione di un $(q + 1)$ -nido,
- (3) q è dispari e π è costruito da un piano di Desargues Σ con una combinazione della sostituzione di un $(q + 1)$ -nido e della sostituzione delle reti di André in Σ .

Sia G il gruppo di ordine $(q + 1)^2$ descritto nel teorema sopra. In questa situazione (cioè, la situazione in cui si ha un $(q + 1)$ -nido), esiste un sottopiano di Baer L di un piano Desarguesiano Σ di ordine q^2 tale che LG è un insieme di $(q + 1)^2/2$ sottopiani di Baer. Inoltre, tale insieme di sottopiani produce una rete tale che possiamo usare reti di sostituzione per ottenere da Σ un $(q + 1)$ -nido di regoli. Esiste un unico regolo R_L di grado $(q + 1)$ che contiene L come sottopiano di Baer. Il $(q + 1)$ - nido è $R_L G$.

Assumiamo $q \equiv 1 \pmod{4}$. Ci sono due sottogruppi ciclici di omologie di ordine $(q + 1)/2$ in G . Sia G^- il sottogruppo corrispondente di ordine $(q + 1)^4/4$. In questo caso, $R_L G^-$ è un insieme di $(q + 1)/2$ regoli. I risultati di Johnson e Pomareda implicano che ci sono $(q + 1)/2$ reti di André in Σ tale che ciascuna ha due componenti in comune con R_L . Supponiamo che

ci siano j di queste reti di André tali che le componenti in comune con R_L giacciono nelle orbite del gruppo G^- . Quindi, ci sono $((q+1)/2 - j)$ reti di André tali che le due componenti in comune con R_L sono nelle stesse orbite del gruppo G^- . Nella situazione di prima, succede che LG copre esattamente $(q+1)/2$ sottopiani di Baer di ogni rete di André; nell'ultima situazione, LG ha un'intersezione con ogni sottopiano di Baer della rete di André. Denotiamo le reti di André che hanno due componenti con R_L in orbite diverse con A_1, A_2, \dots, A_i . Poiché ogni rete A_j è una rete di un regolo, se consideriamo l'insieme di reti $R_L G^- \cup A_j$ come un insieme di $((q+1)/2 + j)$ -regoli, si ottiene anche un $((q+1)/2 + j)$ -nido. Poiché questa rete contiene varie tipi di reti che possono essere ottenute dalla rete R_L , da un gruppo particolare G^- e da reti di André, si chiama un $((q+1)/2 + j)$ -nido misto o più semplicemente un nido misto. In realtà, ci sono due nidi misti che possono essere ottenuti dal gruppo di ordine $(q+1)^2$ dato sopra e due piani di traslazione che possono essere costruiti con reti di sostituzioni di questi nidi misti. Ogni piano di traslazione di questo tipo ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Si ricordi che il piano originale ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)$. In questo caso, i piani costruiti non ammettono un gruppo di omologia di ordine $(q+1)$. Recentamente, Pomareda e Johnson hanno studiato queste reti miste. In particolare ci hanno interessato i piani di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$ che si normalizzano. Quando $q \equiv 1 \pmod{4}$, possiamo ipotizzare che esiste un gruppo di ordine $(q+1)^2/4$ contenente questi sottogruppi di omologie. Per ragioni tecniche, quando $q \equiv -1 \pmod{4}$, dobbiamo fare l'ipotesi che c'è un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2$ che contiene questi sottogruppi di omologie.

Si noti che quando si studia un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo G^- abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2, (q-1)/2)$ è possibile ottenere un piano di traslazione che può essere costruito con rete di sostituzione di un $(q+1)$ -nido di regoli. In questo caso, c'è anche un gruppo abeliano G di ordine $(q+1)^2$ tale che $G^- \subset G$. Non è difficile vedere che esistono G^- -**due orbite** di lunghezza $(q+1)^2/4$. Questa possibilità crea qualche difficoltà. Se si ipotizza che c'è solo un'orbita di lunghezza maggiore di $(q+1)$, allora è possibile avere una classificazione.

TEOREMA 23.2. (Johnson e Pomareda [95]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , per q dispari e diverso da 3 o 7, con fibrazione in $PG(3, q)$. Si assuma che il piano ammette due gruppi ciclici di omologie di ordine $(q+1)/2$ contenuti in un gruppo abeliano di collineazioni di ordine $(q+1)^2/2(2, (q-1)/2)$. Se esiste un'unica orbita di componenti di lunghezza maggiore di $(q+1)/(2, (q-1)/2)$ allora esiste un piano associato Desarguesiano Σ , un nido misto M , e si ha uno dei due casi :

(1) Il piano π può essere costruito da Σ con rete di sostituzione del nido misto M

(2) C'è un insieme di reti di André N che possono essere definite con l'asse e il coasse dei gruppi di omologie tale che π può essere costruito da reti di sostituzioni di M unito alla derivazione multipla di reti di André di N .

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 con coordinate nel campo F isomorfo a $GF(q^2)$ con q e $(q+1)/2$ sono dispari. Sia $\{1, t\}$ una base per F su $K \simeq GF(q)$ con $t^2 = \gamma$ dove γ è un non quadrato. Allora, $t^{q+1} = -\gamma$ tale che $t^q = -t$. Consideriamo una rete di André $\{y = xm \text{ in } \Sigma \text{ tale che } A_\alpha = m^{q+1} = \alpha\}$ per α in K . Sia T un sottospazio di dimensione 2 che non giace nella rete di André e che non abbia un'intersezione con $x = 0$ o $y = 0$. Consideriamo la rete del regolo R_T in Σ di grado $q+1$ che contiene T come sottopiano di Baer. Sia $G^- = \{\text{Diag}(a, b) \mid a, b \text{ in } F \text{ con l'ordine che divide } (q+1)/2\}$. Allora, l'ordine di G^- è $(q+1)^2/4$. Si noti che G^- è il prodotto diretto di due gruppi di omologie di Σ di ordine $(q+1)/2$.

(1) Sia A una rete di André tale che A e R_T hanno due componenti in comune. Poiché T non è in A come sottopiano di Baer, esistono due sottopiani di Baer (che sono sottospazi vettoriali) di A aventi intersezione non-banale con T . Una rete di André di questo tipo si chiama una D/S -rete se e solo se le componenti dell'intersezione sono in orbite diverse ma i sottopiani di Baer dell'intersezione sono nelle stesse orbite.

Analogamente possiamo avere reti di tipo S/D , S/S , D/D .

(2) Una rete di André che ha solo una retta in comune con R_T si chiama una 1-rete.

PROPOSIZIONE 23.3. (Johnson-Pomareda [95]).

(1) Per uno spazio T , se esiste una D/S - rete di André allora tutte le reti di André dell'intersezione sono D/S o S/D -reti.

(2) Se esiste una D/S - rete di André allora possiamo scegliere coordinate tali che $T = \langle (1, 1), (ta, -tb) \rangle$ con a, b che hanno ordini che dividono $(q+1)/2$ e $ab \neq 1$.

TEOREMA 23.4. (Johnson-Pomareda, si veda [95] (Theorem 8)).

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 tale che $q \equiv 1 \pmod{4}$. Se T é uno spazio di dimensione due tale che esiste una rete di André di tipo D/S o S/D allora tutte le immagini di T sotto l'azione del gruppo G^- (di ordine $(q+1)^2/2$ che é il prodotto diretto di due gruppi di omologie in Σ) hanno a due a due intersezione identica.

Esistono j reti di André che sono D/S -reti. Siano queste reti N_1, N_2, \dots, N_j . Allora, per ogni rete N_k , esiste un insieme B_k di $(q+1)/2$ sottopiani che non hanno intersezione in TG^- .

Sia R_L la rete del regolo di grado $q+1$ in Σ che contiene T come sottopiano di Baer. Allora, $R_L \cup \{N_1, N_2, \dots, N_j\}$ é un $((q+1)/2 + j)$ -nido misto che ammette una rete di sostituzione che consiste di $TG^- \cup \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$.

Abbiamo un teorema simile per $q \equiv -1 \pmod{4}$ con un opportuno cambio dell'ipotesi. Abbiamo visto che per un $(q+1)$ -nido, ci sono $((q+1)+j)$ -nidi. Anche, da un $((q+1)/2 + j)$ -nido possiamo costruire un $(q+1)$ -nido.

TEOREMA 23.5. (Johnson-Pomareda [95]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che può essere costruito da un $((q+1)/2 + j)$ -nido e tale che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2, (q-1)/2)$. Allora, esiste un piano di traslazione che può essere costruito da un $(q+1)$ -nido e ammette due gruppi di omologie di ordine $q+1$.

Con un $((q+1)/2 + j)$ -nido possiamo costruire $(q+1-j)$ -nidi.

TEOREMA 23.6. (Johnson-Pomareda [95]).

$((q+1)/2 + j)$ -nidi sono equivalenti a $((q+1) - i)$ -nidi.

Dim: Consideriamo un piano Desarguesiano Σ e un insieme di reti di André. Deriviamo rispetto a queste reti. É facile vedere che questa costruzione produce a un altro piano Desarguesiano Σ^* che ha solo due componenti in comune con Σ . Ora, verifichiamo che una D/S -rete di André in Σ produce a una S/D -rete di André in Σ^* . Allora, ci sono $(q-1)$ reti di André in Σ e di queste $(q+1)/2$ reti di intersezione di cui esattamente j di queste reti sono di tipo D/S . Allora $(q+1)/2 - j$ di queste reti sono S/D -reti. Possiamo dimostrare che ad un sottospazio T di Σ corrisponde un sottospazio T^* di

Σ^* tale che una D/S -rete in Σ diventa una S/D -rete in Σ^* e una S/D -rete in Σ^* diventa una D/S -rete in Σ . Quindi un $((q+1)/2 + j)$ -nido misto in Σ dá luogo a un $((q+1)/2 + (q+1)/2 - j) = (q+1-j)$ -nido misto.

Una domanda naturale é se questi piani di traslazione che possono essere costruiti con nidi misti sono piani nuovi.

TEOREMA 23.7. (Johnson-Pomareda [95]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2, (q-1)/2)$ che contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Allora, π é un piano di André se e solo se ogni orbita di componenti ha lunghezza minore o uguale $(q+1)/(2, (q-1)/2)$.

Allora, si ha:

TEOREMA 23.8. (Johnson-Pomareda [95]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2, (q-1)/2)$ contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Se esiste un'orbita di componenti con lunghezza maggiore di $(q+1)$ allora π non può essere un piano di André. In particolare, un piano di traslazione che può essere costruito con un nido misto non é un piano di André.